Kac-Wakimoto理論のtoroidal Lie algebraへの拡張 (離散可積分系の研究の進展 : 超離散化・量子化)

斉藤, 義久

数理解析研究所講究録 1221 巻 2001 年 38-48

Kac-Wakimoto理論の toroidal Lie algebraへの拡張

斉藤 義久 (Yoshihisa Saito)

広島大学大学院理学研究科

1 Introduction

KdV方程式

$$u_t = \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx}$$

は前世紀末Kortewegとde Vriesによって浅い水の波の方程式として提出された。その後数々の研究を経てKdV方程式は自由度無限大の可積分系として理解されるようになったことはよく知られている。

ではKdV方程式はなぜ可積分系なのであろうか?あるいはKdV方程式の可積分性は何に由来するのであろうか?

この問いに対する一つの答えは「KdV方程式(系)が非常に高い対称性を持っている」ことによる、といってよいであろう。すなわち系の変換群に着目するという立場である。このような立場からのKdV方程式(系)へのアプローチとしてaffine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$の表現論を用いた方法が開発されている。$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$の表現論から出発してKdV方程式系(の広田型双線形微分方程式による表示)を導くことができ、さらに可積分性も説明することが出来る[1]。Kac-Wakimotoはこのような視点を一般化させて、より広いクラスのaffine Lie algebraの表現に付随する広田型双線形微分方程式を得た。

この小論では、上に述べた立場をさらに一般化する。つまり対称性を記述するalgebraをaffine Lie algebraからtoroidal Lie algebraに取り換えてしまう。affine Lie algebraが有限次元単純Lie algebra $\mathfrak{g}$と1変数Laurent多項式環のテンソル積のcentral extensionとして定義されるのに対し、toroidal Lie algebraは$\mathfrak{g}$と2変数(一般にはn変数)Laurent多項式環のテンソル積のcentral extensionとして定義される。その意味でtoroidal Lie algebraはaffine Lie algebraの拡張になっている。しかしKac-Moody Lie algebraではないため表現の一般論という点からは詳しいことは何もわかっていないといってよい。

toroidal Lie algebraの表現で、現時点で手でいじることが出来る殆ど唯一の例は頂点表現である。頂点表現に対してはKac-Wakimotoの「表現論からソリトン方程式を得るための処方箋」が適応できる。このようにしてtoroidal Lie algebraの対称性を持つ広田型双線形微分方程式系が得られ、構成法からaffine Lie algebraの表現に付随する広田型双線形微分方程式系を部分階層として含むことが直ちにわかる。すなわちKac-Wakimoto理論の拡張版が得られたことになる。ただし得られた方程式系の可積分性については現時点では不明であり、今後の重要な課題といえる。

ここで紹介する結果は神戸大学の庵原謙治氏、九州大学の脇本実氏との共同研究である。詳しい証明等に関しては [ISW1], [ISW2] を参照されたい。

[1]この言い方には多少問題がある。詳しくは§4 課題?を参照されたい。

2 準備

この節では話の中心となる toroidal Lie algebra およびその表現について述べる。

2.1 toroidal Lie algebra の定義

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純 Lie algebra、$\mathfrak{h}$ をその Cartan subalgebra、$(\cdot,\cdot)$ を $\mathfrak{g}$ の non-degenerate symmetric invariant bilinear form、Δ を root の全体、Δ_+ を positive root の全体とする。

$A=\mathbb{C}[s^{\pm 1},t^{\pm 1}]$ を $\mathbb{C}$ 上の 2 変数 Laurent 多項式環とし、$\mathfrak{g}$ の A による拡大 $\mathfrak{g}\otimes A$ を考える。ただし交換関係は

$$[X\otimes f, Y\otimes g]:=[X,Y]\otimes fg,\quad X,Y\in\mathfrak{g},\ f,g\in A$$

とする。

このとき (2-)toroidal Lie algebra $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ は $\mathfrak{g}\otimes A$ の 'universal central extension' として定義される。universal central extension として定義した場合、ある種の性質を示す時には非常に役立つこともあるが「具体的にどのようなものがわからない」ということにより、実際の計算には不都合なこともある。しかし toroidal Lie algebra の場合には次に定義する Lie algebra と、universal central extension として定義される Lie algebra が同型であることが知られており、ここでは前者を toroidal Lie algebra の定義として採用することにする。

Definition $\Omega_A^1=Ads\oplus Adt$ を A 上の *1-form* のなす空間とし、

$$\bar{\cdot}:\Omega_A^1\longrightarrow\Omega_A^1/dA$$

を *canonical projection* とする。このとき

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}:=\mathfrak{g}\otimes A\oplus\Omega_A^1/dA$$

を *(2-)toroidal Lie algebra* と呼ぶ。ただし交換関係は

$$[X\otimes f, Y\otimes g]:=[X,Y]\otimes fg+(X,Y)\overline{(df)g},\quad X,Y\in\mathfrak{g},f,g\in A,$$
$$c\in\Omega_A^1/dA \text{ は } \textit{center} \text{ の元}$$

と定義する。

以上が toroidal Lie algebra の定義であるが、今回は以下のようなさらに大きい Lie algebra $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}^{\vee}$ を用意する。

Definition

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}^{\vee}:=\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}\oplus\mathbb{C}\partial_{\log s}\oplus A\partial_{\log t}$$

とする。ただし交換関係は

$$\begin{aligned}
&[\partial_{\log s}, X\otimes f]=X\otimes(\partial_{\log s}f),\quad [g\partial_{\log t}, X\otimes f]=X\otimes(g\partial_{\log t}f),\\
&[\partial_{\log s},\overline{fd\log s}]=\overline{(\partial_{\log s}f)d\log s},\quad [g\partial_{\log t},\overline{fd\log s}]=\overline{(g\partial_{\log t}f)d\log s},\\
&[\partial_{\log s},\overline{fd\log t}]=\overline{(\partial_{\log s}f)d\log t},\quad [g\partial_{\log t},\overline{fd\log t}]=\overline{(g\partial_{\log t}f)d\log t}+\overline{f(dg)},\\
&[\partial_{\log s}, g\partial_{\log t}]=(\partial_{\log s}g)\partial_{\log t},\\
&[f\partial_{\log t}, g\partial_{\log t}]=\{f(\partial_{\log t}g)-g(\partial_{\log t}f)\}\partial_{\log t}-\overline{(\partial_{\log t}g)\{d(\partial_{\log t}f)\}}.
\end{aligned}$$

このとき affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s, s^{-1}] \oplus \mathbb{C}d\log s \oplus \mathbb{C}\partial_{\log s}$ が $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}^{\vee}$ の中に自然に埋め込まれている。この埋め込みの image を $\hat{\mathfrak{g}}_s$ と書くことにする。

またベクトル場 $\mathcal{D} := A\partial_{\log s} \oplus A\partial_{\log t}$ の $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ への作用を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
&[f\partial_{\log\natural}, X \otimes g] = X \otimes (f\partial_{\log\natural} g), \quad \natural = s, t,\\
&\quad [f\partial_{\log s}, \overline{gd\log s}] = -\overline{f(\partial_{\log t} g)d\log t}, \quad [f\partial_{\log s}, \overline{gd\log t}] = \overline{f(\partial_{\log s} g)d\log t},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for} \quad X \in \mathfrak{g}, \quad \text{and} \quad f, g \in A. \quad (1)
\end{aligned}
$$

Remark 1 $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}{}^{\vee}$ の定義は変数 s と変数 t を不平等に扱っており、*Lie algebra* として $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}} \oplus \mathcal{D}$ を考える方が自然だと思われることだろう。しかし次節で構成するような頂点表現を持ち、さらに $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ を *subalgebra* として含むように $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}} \oplus \mathcal{D}$ 上に *Lie algebra* の構造を入れることはできない。そこで今回は変数をわざと不平等に扱った。
(正確に言うと「できない」ではなく「我々にはできなかった」と言うべきで、できないことが証明できているわけではない。)

2.2 表現の構成

以下 $\mathfrak{g}$ は A_l, D_l or E_l 型と仮定する。この節では $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}{}^{\vee}$ の頂点表現 (vertex representation) を構成する。

$\mathcal{H}$ を φ_k, $\varphi_k^{\dagger}$ $(k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, c で生成される Lie algebra とする。ただし交換関係は

$$
[\varphi_k^{\dagger}, \varphi_l] = k\delta_{k+l,0}c, \quad [\varphi_k, \varphi_l] = [\varphi_k^{\dagger}, \varphi_l^{\dagger}] = 0,
$$

$$
c \text{ は central elenent}
$$

とする。

$\mathcal{H}^+$ を φ_k, $\varphi_k^{\dagger}$ $(k > 0)$, c で生成される $\mathcal{H}$ の subalgebra とし、次のような $\mathcal{H}^+$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_{\mathrm{vac}} := \mathbb{C}|0>$ を考える。

$$
\varphi_k|0>= 0, \quad \varphi_k^{\dagger}|0>= 0, (k > 0), c|0>= |0> .
$$

さらに

$$
\mathcal{F}_{\varphi} := (\mathrm{Ind}_{U(\mathcal{H}^+)}^{U(\mathcal{H})}\mathbb{C}_{\mathrm{vac}}) \otimes \mathbb{C}[\mathbb{Z}\delta_t]
$$

とする。ここで $\mathbb{C}[\mathbb{Z}\delta_t]$ は δ_t を生成元とする abel 群 $\mathbb{Z}\delta_t$ の群環である。第 2 成分には trivial に作用することにすれば $\mathcal{F}_{\varphi}$ は $\mathcal{H}$-module の構造を持つ。

各 $X \in \mathfrak{g}, l \in \mathbb{Z}, * = s, t$ に対して z に関する formal series

$$
X_l(z) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} X \otimes s^p t^l z^{-p-1},
$$

$$
K_l^*(z) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} \overline{s^p t^l d\log *} z^{-p-1}, \quad D_l^*(z) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} s^p t^l \partial_{\log *} z^{-p-1}
$$

を考える。

また $d_t, e^{\delta_t} \in \mathrm{End}(\mathcal{F}_{\varphi})$ を

$$
d_t(v \otimes e^{m\delta_t}) := m(v \otimes e^{m\delta_t}), \quad e^{\delta_t}(v \otimes e^{m\delta_t}) := v \otimes e^{(m+1)\delta_t}
$$

で定義し、End($\mathcal{F}_\varphi$)-valued の generating series

$$\varphi(z) := \sum_{k\neq 0} \varphi_k z^{-k-1}, \quad \varphi^\dagger(z) := (d_t + \sum_{k\neq 0} \varphi_k^\dagger z^{-k})z^{-1},$$

$$\Delta(z) := \exp\left(\sum_{k>0} \frac{\varphi_{-k}}{k} z^k\right) \exp\left(-\sum_{k>0} \frac{\varphi_k}{k} z^{-k}\right) e^{\delta_t}$$

とする。

$V \in \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{g}})$ とすると菅原構成により Virasoro algebra の作用が V に定まる。従って End(V)-valued の formal series として

$$X(z) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} X \otimes s^p z^{-p-1}, \quad T(z) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} L_p z^{-p-2}$$

は意味を持つ。

以上の準備の下に次の命題が成り立つ。

Proposition 2.1 *(i)* $\hat{\mathfrak{g}} \cong \hat{\mathfrak{g}}_s$ の同一視の下に *category* $\mathcal{O}(\hat{\mathfrak{g}})$ から $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}{}^\vee$*-module* の *category* への *functor* $\mathcal{F} : (\mathcal{V}, \pi) \mapsto (\mathcal{V} \otimes \mathcal{F}_\varphi, \tilde{\pi})$ が存在する；

$$\tilde{\pi}(X_l(z)) = \pi(X(z))\otimes :\Delta(z)^l:,$$

$$\tilde{\pi}(K_l^s(z)) = \pi(\overline{d\log s})\otimes :\Delta(z)^l: z^1, \quad \tilde{\pi}(K_l^t(z)) = 1\otimes :\varphi(z)\Delta(z)^l:,$$

$$\tilde{\pi}(\partial_{\log_s}) = -Res_{z=0}\{z(\pi(T(z))\otimes 1 + 1\otimes :\varphi(z)\varphi^\dagger(z))\}:,$$

$$\tilde{\pi}(D_l^t(z)) = 1\otimes :\varphi^\dagger(z)\Delta(z)^l:.$$

ただし $:\cdot:$ は *normal ordering* を表す。

(ii) V が既約 *integrable* $\hat{\mathfrak{g}}$*-module* ならば $\mathcal{F}(V)$ は既約 $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}{}^\vee$*-module* である。

また $D_l^s(z)$ の $\mathcal{F}(V) = V \otimes \mathcal{F}_\varphi$ への作用を

$$\tilde{\pi}(D_l^s(z)) = -\{z(\pi(T(z))\otimes 1 + 1\otimes :\varphi(z)\varphi^\dagger(z)\Delta(z)^l)\}:$$

で定めると、前節で定義したベクトル場 $\mathcal{D} := A\partial_{\log s} \oplus A\partial_{\log t}$ の $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ への作用と compatible になっている。

後で toroidal Lie algebra の表現に付随した広田型双線形形式を導出するが、そのためには $\mathcal{F}_\varphi$ の realization を次のようにとっておく必要がある。

$$\mathcal{F}_\varphi = \mathbb{C}[u_n, v_n | n \in \mathbb{Z}_{>0}] \otimes \mathbb{C}[e^{\pm w}].$$

このとき表現の定義に必要な operator 達は次のように実現される。

$$\varphi_k \mapsto \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v_k} & k>0, \\ -ku_{-k} & k<0, \end{cases} \quad \varphi_k^\dagger \mapsto \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_k} & k>0, \\ -kv_{-k} & k<0, \end{cases} \quad e^{\pm\delta_t} \mapsto e^{\pm w}.$$

2.3 Generalized Casimir elements

$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}} \oplus \mathcal{D}$ 上の symmetric bilinear form $(\cdot|\cdot)_{\mathrm{tor}}$ を次のように定義する。

$$
\begin{array}{ll}
i) & (X \otimes t^p s^k | Y \otimes t^q s^l)_{\mathrm{tor}} := (X, Y)\delta_{p+q,0}\delta_{k+l,0}, \\
ii) & (\overline{t^p s^k d\log \natural} | t^q s^l \partial_{\log \natural})_{\mathrm{tor}} := \delta_{p+q,0}\delta_{k+l,0} \quad \natural = s, t, \\
iii) & (\overline{d\log \sharp} | \partial_{\log \flat})_{\mathrm{tor}} := \delta_{\sharp,\flat} \quad \sharp, \flat = s, t, \\
iv) & \text{other pairs give zero.}
\end{array}
$$

このとき以下の補題が成り立つ。

Lemma 2.2 $(\cdot|\cdot)_{\mathrm{tor}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$-*invariant* である。すなわち

$$([x, g]|y)_{\mathrm{tor}} = (x|[g, y])_{\mathrm{tor}}, \qquad g \in \mathfrak{g}_{\mathrm{tor}},\ x, y \in \mathfrak{g}_{\mathrm{tor}} \oplus \mathcal{D}.$$

が成り立つ。

Remark 2 $(\cdot|\cdot)_{\mathrm{tor}}$ は非退化ではない。ただし $\mathfrak{g} \otimes A \times \mathfrak{g} \otimes A$ 上に制限すれば非退化である。

次に Generalized Casimir elements を定義しよう。

Definition $\{I^a\}_{i=1,\cdots \dim \mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の $(\cdot|\cdot)$ に関する正規直交基底とし、

$$
\begin{aligned}
\Omega(z) := &\sum_{\alpha\in\Delta}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varepsilon(\alpha, -\alpha) X_{\alpha,k}(z) \otimes X_{-\alpha,-k}(z) + \sum_{1\le i\le \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} u_k^{(i)}(z) \otimes u_{-k}^{(i)}(z) \\
&+ \sum_{*=s,t}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left\{ K_k^*(z) \otimes D_{-k}^*(z) + D_k^*(z) \otimes K_{-k}^*(z) \right\}.
\end{aligned}
$$

と定義する。$\Omega(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k z^{-k-2}$ と展開したときの各 Ω_k を *Generalized Casimir element* と呼ぶ。

Remark 3 Ω_k は無限和で定義されておりこのままでは意味を持たない。しかし少なくとも次章における広田双線形形式の導出に必要な場合、すなわち V として $\hat{\mathfrak{g}}$ の *basic* 表現をとった場合には意味づけをすることが出来る。$\mathcal{F}(V) \otimes \mathcal{F}(V)$ の適当な *completion* $\mathcal{F}(V)\hat{\otimes}\mathcal{F}(V)$ を考えると *Generalized Casimir element* は

$$\Omega_k : \mathcal{F}(V) \otimes \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)\hat{\otimes}\mathcal{F}(V)$$

なる *operator* として意味を持つ。*completion* の具体形はここでは述べないが、以下 Ω_k を考える場合にはすべてこのような *completion* 込みで考えていることに注意してほしい。

さて Lemma 2.2 の帰結として次の重要な性質が導ける。

Lemma 2.3 $\mathcal{F}(V) \otimes \mathcal{F}(V)$ に働く *operators* として

$$[\Omega(z), \mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}] = 0$$

が成り立つ。

3 広田型双線形形式の導出

3.1 導出のアイデア

この節では「どうやって広田型双線形形式を得るか？」という処方箋を述べる。具体的に考えようとすると前章の終りに述べた completion の問題等が絡んでくるが、ここではアイデアのみを述べることにして細かいことにはこだわらないことにする。

$V \in \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{g}})$ が多項式環で実現でき、$\hat{\mathfrak{g}}$ の作用が微分作用素で書けているような表現であるとしよう。この場合 2.2 節に述べた $\mathcal{F}_\varphi$ の実現を用いれば $\mathcal{F}(V)$ も多項式環みないなものと思ってよい。(ただし $\mathcal{F}_\varphi$ の中にある変数 w は exponential の肩に乗っているので本当に多項式環というわけにはいかないが。)

さらに $\mathbf{1} \in \mathcal{F}(V)$ という vector が存在して

$$\Omega_k(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = 0 \qquad (*)$$

となっていると仮定しよう。このとき Lie algebra $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ に対応する "Lie group" G_{tor} を考える。G_{tor} は $\mathcal{F}(V)$ に作用しており $\mathbf{1} \in \mathcal{F}(V)$ の G_{tor}-orbit を考えることができる。τ がこの G_{tor}-orbit に含まれているとすると上記の方程式 $(*)$ と Lemma 2.3 から

$$\Omega_k(\tau \otimes \tau) = 0 \qquad (**)$$

を得る。$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の作用は $\mathcal{F}(V)$ 上微分作用素で書かれていたので、方程式 $(**)$ は τ を未知関数とする微分方程式と思うことができる。

以上が $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の表現から微分方程式を導く (ラフな) アイデアである。我々の場合 affine の表現から toroidal の表現の構成を functorial に行ってしまっているので適当な affine の表現 V であって $\mathcal{F}$ が条件 $(*)$ を満たすようなものをとれば微分方程式 $(**)$ を作り出せるわけである。

3.2 homogeneous realization の場合

前節のアイデアに従って V として basic 表現の homogeneous realization をとってみよう。

$Q = \oplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}\alpha_i$ を $\mathfrak{g}$ の root lattice, $\varepsilon : Q \times Q \longrightarrow \{\pm 1\}$ を次を満たす bimultiplicative な関数とする。

$$\begin{cases} \varepsilon(\alpha + \alpha', \beta) = & \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\alpha', \beta) \\ \varepsilon(\alpha, \beta + \beta') = & \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\alpha, \beta') \end{cases}, \qquad \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in Q,$$

かつ

$$\varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} (-1)^{(\alpha_i, \alpha_j)} & \text{if} \quad i < j, \\ (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_i)} & \text{if} \quad i = j, \\ 1 & \text{if} \quad i > j. \end{cases}$$

$\mathbb{C}_\varepsilon\{Q\}$ を cocycle ε で twist された Q の twisted group algebra とする。

$$S := \mathbb{C}[x_k^{(j)} | 1 \leq j \leq \mathrm{rk}\ \mathfrak{g}, \quad k \in \mathbb{Z}_{>0}]$$

$$V^{\mathrm{hom}} := S \otimes \mathbb{C}_\varepsilon\{Q\}.$$

とする。

このとき vertex operator を用いて V^{hom} 上に $\mathfrak{g}$ の作用を定義することができることが知られている。さらに $\mathfrak{g}$-module として V^{hom} は highest weight Λ_0 の既約 integrable 表現 $L(\Lambda_0)$ と同型である。V^{hom} のことを basic 表現の homogeneous realization と呼ぶ。homogeneous realization に対しては前節の最後に述べた条件 $(*)$ が成立することが簡単な計算で確かめられる。すなわち

Lemma 3.1 $\mathbf{1}^{\mathrm{hom}} := (1 \otimes e^0) \otimes (1 \otimes e^0) \in \mathcal{F}(V^{\mathrm{hom}}) = V^{\mathrm{hom}} \otimes \mathcal{F}_\varphi$ とするとき

$$\Omega_0(\mathbf{1}^{\mathrm{hom}} \otimes \mathbf{1}^{\mathrm{hom}}) = 0$$

が成り立つ。

$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ に対応する "Lie group" $G^{\mathrm{hom}}_{\mathrm{tor}}$ を

$G^{\mathrm{hom}}_{\mathrm{tor}} :=< \exp(X) \mid X \in \mathfrak{g} \otimes A,\ X$ は $\mathcal{F}(V^{\mathrm{hom}})$ に locally nilpotent に作用する。$>$

とする。ここで $< \cdot >$ は生成されるという意味である。

$\mathfrak{h}$ の orthonormal base $\{u^{(i)}\}$ とし、

$$\sum_{n\geq 0} S_n(x) z^n := \exp\left\{\sum_{j>0} x_j z^j\right\}, \quad \sum_{n\geq 0} P^{(\alpha)}_n(x) z^n := \exp\left\{\sum_{j>0}\sum_{i=1}^{l} (\alpha, u^{(i)}) x^{(i)}_j z^j\right\}$$

と定義する。

$\deg x^{(i)}_j = j$ で定まる $\mathcal{F}(V^{\mathrm{hom}})$ の gradation を考える。この gradation に関する、$\mathbf{1}^{\mathrm{hom}} \in \mathcal{F}(V^{\mathrm{hom}})$ を通る $G^{\mathrm{hom}}_{\mathrm{tor}}$-orbit の completion を $\overline{G^{\mathrm{hom}}_{\mathrm{tor}}(\mathbf{1}^{\mathrm{hom}})}$ と書く。

以上の準備の下に前節で述べた「アイデア」を具体的に実行することによって次の定理を得る。

Theorem 3.2 $\tau = \sum_{\beta\in Q} \tau_\beta e^\beta \in \overline{G^{\mathrm{hom}}_{tor}(\mathbf{1}^{\mathrm{hom}})}$ とするとき、方程式

$$\Omega_0(\tau \otimes \tau) = 0$$

を書き直すことによって $\{\tau_\beta\}_{\beta\in Q}$ を未知関数とする次の広田型双線形形式を得る。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\Delta} \varepsilon(\alpha, \beta' - \beta'') \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{j+k=n,\\ j,k\geq 0}} S_j((\kappa - D_w)\tilde{u}) P^{(\alpha)}_k(2y) P^{(\alpha)}_{n-2+(\alpha,\beta'-\beta'')}(-\tilde{D}_x) \\
&\qquad \times \exp(\sum_{n>0}\sum_{i=1}^{l} y^{(i)}_n D_{x^{(i)}_n}) \exp(\sum_{n>0} \tilde{u}_n D_{u_n}) \tau_{\beta'-\alpha} \circ \tau_{\beta''+\alpha} \\
&+ \left[\frac{1}{2}|\beta' - \beta''|^2 + \sum_{n\geq 0}\left\{\sum_{i=1}^{l}\left((\beta' - \beta'', u^{(i)}) D_{x^{(i)}_n} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j+k=n,\\ j,k>0}} D_{x^{(i)}_j} D_{x^{(i)}_k} + 2\sum_{k>0} k y^{(i)}_k D_{x^{(i)}_{n+k}}\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +2\sum_{k>0}(k-n)\tilde{u}_{k-n} D_{u_k}\right\} S_n((\kappa - D_w)\tilde{u})\right] \\
&\qquad \times \exp(\sum_{n>0}\sum_{i=1}^{l} y^{(i)}_n D_{x^{(i)}_n}) \exp(\sum_{n>0} \tilde{u}_n D_{u_n}) \tau_{\beta'} \circ \tau_{\beta''} = 0, \\
&\qquad\qquad \beta', \beta'' \in Q.
\end{aligned}$$

ただし $D_{x_n}^{(i)}, D_{u_n}, D_w$, $\tilde{D}_{x_n}^{(i)} = \frac{1}{n} D_{x_n}^{(i)}$ は広田微分、$\kappa, y = \left\{ y_n^{(i)} \right\}, \tilde{u} = \{\tilde{u}_n\}, \tilde{v} = \{\tilde{v}_n\}$ は独立変数である。

Remark 4 *1.* 未知関数 τ は本来 $x = \{x_n^{(i)}\}, u = \{u_n\}, v = \{v_n\}, w$ の関数であるが *Lemma 2.3* の帰結として v に関して *constant* ということがわかる。従って τ は本来 x, u, w の関数である。

2. 定理中にも述べたように $\kappa, y = \left\{ y_n^{(i)} \right\}, \tilde{u} = \{\tilde{u}_n\}, \tilde{v} = \{\tilde{v}_n\}$ は独立変数である。すなわちこの広田型双線形形式は $\kappa, y, \tilde{u}, \tilde{v}$ の *monomial* を一つ固定するごとに「係数 $= 0$」という方程式を定めており、従って我々の得た方程式は無限連立の広田型双線形形式系を定めている。

3. 定理で得られた方程式を「y のみの *monomial* 係数 $= 0$」という部分に制限すると、*Kac-Wakimoto* 理論で *affine Lie algebra* の *basic* 表現の *homogeneous realization* から得られる方程式系と一致する。特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ ならば *Non-Linear Schrödinger hierarchy* が得られる。その意味で我々の広田型双線形形式は *Kac-Wakimoto* 理論の拡張形と言える。

3.3 principal realization の場合

今度は V として basic 表現の principal realization をとった場合を考える。homogeneous realization に比べて表現を定義するためのデータが多少複雑になるが基本的なアイデアは全く同じである。

$$E := \{(i,r) | 1 \le i \le l, r \in \mathbb{Z}\}, \quad E_+ := \{(i,r) \in E | r \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\}.$$

とおく。よく知られているように affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}_s$ は

$$V^{\mathrm{pr}} := \mathbb{C}[x_{i;r} | (i,r) \in E_+].$$

に作用し、$\hat{\mathfrak{g}}_s$-module として basic 表現と同型である。この V^{pr} のことを basic 表現の principal realization と呼ぶ。Proposition 2.1 により $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ が $\mathcal{F}(V^{\mathrm{pr}}) = V^{\mathrm{pr}} \otimes \mathcal{F}_\varphi$ に作用する。

$$\mathbf{1}^{\mathrm{pr}} := 1 \otimes (1 \otimes e^0)$$

とすると 3.1 節で述べた条件 $(*)$ がこの場合にも成立する。

Lemma 3.3

$$\Omega_0(\mathbf{1}^{\mathrm{pr}} \otimes \mathbf{1}^{\mathrm{pr}}) = 0.$$

今後しばらく principal の場合の広田型双線形形式を記述するための表現論的な準備をする。詳しくは [Ko],[KW] を参照されたい。

h を $\mathfrak{g}$ の Coxeter number とし、$\mathfrak{g}$ 上の $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$-gradation を次のように定める:

$$\mathfrak{g} = \sum_{j \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{(j)}, \qquad \mathfrak{g}^{(j)} := \begin{cases} \sum_{\alpha \in \Delta_j} \mathfrak{g}_\alpha & \text{if } j \ne 0, \\ \mathfrak{h} & \text{if } j = 0, \end{cases} \quad j \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}.$$

ただし $\Delta_j := \{\alpha \in \Delta | \ \mathrm{ht}\alpha \equiv j \mod h\}$ である。

e_β を root β に対応する root vector、θ を highest root とし $e := \sum_{i=1}^{l} e_{\alpha_i} + e_{-\theta}$ なる element とすると、$e \in \mathfrak{g}$ は regular semismiple element であることがわかる。従って e の centralizer $\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra である。$\mathfrak{s}$ に関する root の集合を Δ^{pr} と書く。$\rho^\vee \in \mathfrak{h}$ を $(\rho^\vee, \alpha_i) = 1$ なる条件で定まる元とする。ただし α_i は任意の simple root とする。このとき $w := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{h}\rho^\vee)$ とすると $w|_{\mathfrak{g}^{(j)}} = \exp(\frac{2\pi j\sqrt{-1}}{h})\mathrm{rm\ id}_{\mathfrak{g}^{(j)}}$ が成り立つ。そこで Δ^{pr} を $l = \mathrm{rk}\mathfrak{g}$ 個の $\langle w \rangle$-orbit にわけることができる。$\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l\}$ をその representatives とする。$e \in \mathfrak{g}^{(1)}$ は先に定義した $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$-gradation に関して homogeneous なので $\mathfrak{s} = \sum_{j\in\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}^{(j)}$ が成立する。$\mathfrak{s}$ の homogeneous basis $S^{[i]} \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}^{(m_i)}$ $(1 \le i \le l)$ を $(S^{[i]}, S^{[j]}) = h\delta_{i+j,l}$ が成り立つようにとる。ここで

$$1 = m_1 < m_2 \le \cdots \le m_{l-1} < m_l = h - 1$$

は $\mathfrak{g}$ の exponents である。$\alpha \in \Delta^{\mathrm{pr}}$ に対し、α に属する root vector e_α^{pr} を nomalization condition $(e_\alpha^{\mathrm{pr}}, e_{-\alpha}^{\mathrm{pr}}) = h$ を満たすようにとる。このとき e_α^{pr} は $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$-gradation に関して

$$e_\alpha^{\mathrm{pr}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} e_\alpha^{pr,(j)} \qquad e_\alpha^{pr,(j)} \in \mathfrak{g}^{(j)}$$

と分解する。

$$G_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{pr}} := < \exp(X) \mid X \in \mathfrak{g} \otimes A,\ X \text{ は } \mathcal{F}(V^{\mathrm{pr}}) \text{ に locally nilpotent に作用する。} >$$

とする。$\deg x_{j;r} = m_j + rh$ によって定まる $\mathcal{F}(V^{\mathrm{pr}})$ の gradation を考え、$G_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{pr}}(\mathbf{1}^{\mathrm{pr}})$ の gradation に関する completion を $\overline{G_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{pr}}(\mathbf{1}^{\mathrm{pr}})}$ と書く。また

$$\sum_{n\ge0} P_n^E(x) z^n := \exp\left\{ \sum_{(j,r)\in E_+} x_{j;r} z^{m_j+rh} \right\}.$$

とする。このとき前節と同様の議論で以下の定理を得る。

Theorem 3.4 $\tau \in \overline{G_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{pr}}(\mathbf{1}^{\mathrm{pr}})}$ とする。このとき次の広田型双線形形式の *hierarchy* が成立する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{l} (\rho^\vee, e_{\gamma_i}^{pr,(0)})(\rho^\vee, e_{-\gamma_i}^{pr,(0)}) \sum_{n\ge0} \sum_{\substack{mh+k=n,\\ m,k\ge0}} \\
&\qquad S_m((\kappa - D_w)\tilde{u}) \left\{ P_k^E(2\gamma_i(S^{[j]})y_{j;r}) P_n^E(-\frac{\gamma_i(S^{[l+1-j]})}{m_j + rh} D_{x_{j;r}}) - \delta_{m,0}\delta_{k,0} \right\} \\
&\qquad \times \exp(\sum_{(i;r)\in E_+} y_{i;r} D_{x_{i;r}}) \exp(\sum_{n>0} \tilde{u}_n D_{u_n}) \tau \circ \tau \\
&- h \sum_{n\ge0} \left\{ \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{j+k=n-1,\\ j,k\ge0}} D_{x_{i;j}} D_{x_{l+1-i;k}} + 2\sum_{k\ge0} (kh + m_i) y_{i;k} D_{x_{i;n+k}} \right) \right. \\
&\qquad \left. + 2h \sum_{k\ge0} (k-n)\tilde{u}_{k-n} D_{u_k} \right\} S_n((\kappa - D_w)\tilde{u}) \\
&\qquad \times \exp(\sum_{(i;r)\in E_+} y_{i;r} D_{x_{i;r}}) \exp(\sum_{n>0} \tilde{u}_n D_{u_n}) \tau \circ \tau = 0.
\end{aligned}$$

ここで $D_{x_{i;j}}, D_{u_n}, D_w$ は広田微分、$\kappa, y = \left\{y_n^{(i)}\right\}, \tilde{u} = \{\tilde{u}_n\}, \tilde{v} = \{\tilde{v}_n\}$ は独立変数である。

Remark 5 方程式の「読み方」は前節 *Remark 4* と同様である。また「y のみの *monomial* 係数 $= 0$」という部分に制限すると、*affine Lie algebra* の *basic* 表現の *principal realization* から得られる方程式系と一致する。特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ ならば *KdV hierarchy* が得られる。$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の場合には *Billig [B]* により同様の結果が知られており、我々の結果は *Billig* の結果の *ADE* 型への拡張になっている。

4 課題？

京都スクールによるソリトン方程式の理論によれば KdV 方程式は KP 方程式

$$\frac{3}{4}u_{yy} = (u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx})_x$$

からの reduction として現れる。つまり KP 方程式がいわば「親分」であって、KdV 方程式は KP 方程式のある一面を見ていることになる。

KP 方程式の対称性は $\mathfrak{gl}(\infty)$ で記述される。我々の立場で言い直せば $\mathfrak{gl}(\infty)$ の表現論を使って KP 方程式系 (の広田型双線形微分方程式による表示) が導出できる、ということになる。KP 方程式の場合にはこれに留まらず、得られた広田型双線形微分方程式から Lax 形式を導くことが出来る。経験上、Lax 形式の存在は系の可積分性と等価であり (無限自由度における可積分性の定義が確立していない以上、正確に述べることは出来ないが)、従って「可積分」である。一旦 KP 方程式の Lax 形式がわかってしまえば、その reduction である KdV 方程式の Lax 形式も容易に知ることができ、従って KdV 方程式も「可積分」である。KP 方程式の場合は Lax 形式の存在だけでなく、普遍 Grassmann 多様体上の力学系 (仮に KP 力学系と呼ぼう) と捉えることができ「可積分」の意味はさらにはっきりする。この場合 KdV 方程式の可積分性も KP 力学系の部分力学系として意味を持つ。

一方 KdV 方程式の階層自身は $\mathfrak{gl}(\infty)$ を使わずに $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現論だけで得ることが出来る。では KdV 方程式の階層の可積分性 (ここでは Lax 形式の存在を意味するものとする) を $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現論の枠組の中だけで示すことが出来ているかというと、単純に「Yes」とは言い難い。つまり KP 方程式を経由して、そこからの reduction だと思わないと Lax 形式の存在が容易には示せない[2] 。Introduction の脚注で問題があるといったのはこの点である。もちろん KdV 方程式の可積分性は KP 方程式を経由せずとも逆散乱理論等の表現論を用いない方法によって確かめられているわけだが、表現論の枠組の中だけで示すことは可能なのであろうか？

なぜこのようなことを問題にするかというと、我々の得た方程式系はいわば「$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現論だけがある状態」で、$\mathfrak{gl}(\infty)$ の部分が欠落している。もし $\mathfrak{gl}(\infty)$ を経由しないと Lax 形式がわからないならば、可積分であることを示すために $\mathfrak{gl}(\infty)$ の toroidal 版を作る必要があることになるが、本当にこんなものは存在するのだろうか？

[2]強調のためにこのような書き方をしたが、全く方法がないという訳ではない。しかし知られている方法は affine Lie algebra の表現論に関する種々の結果を用いており、表現の一般論がわかっていない toroidal Lie algebra には適応できない。

References

[B] Y. Billig, *An Extension of the KdV Hierarchy Arising from a Representations of a Toroidal Lie Algebra*, preprint solv-int/9706008.

[EM] S. Eswara Rao and R. Moody, *Vertex representations for N-toroidal Lie algebras and a generalization of the Virasoro algebra*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), 239-264.

[ISW1] K. Iohara, Y. Saito and M. Wakimoto, *Hirota bilinear forms with 2-toroidal symmetry*, Phys. Lett. A **254**, (1999), 37-46.

[ISW2] K. Iohara, Y. Saito and M. Wakimoto, *Notes on differential equations arising from a representation of 2-toroidal Lie algebras*, Progr. Theort. Phys. Suppl. **135**, (1999), 166-181.

[Kac] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, $3^{rd.}$ ed., Cambr. Univ. Press, 1991.

[Ko] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math. **81**, (1959), 973-1032.

[KW] V. G. Kac and M. Wakimoto, *Exceptional Hierarchies of Soliton Equations*, Proc. Symp. in Pure Math. **49**, Part *I* (1989), 191-237.

[K-Sai] K. Saito, *Extended Affine Root Systems I , II, III (with T. Takebayashi) and IV (with D. Yoshii)* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21**,(1985), 75-179, **26**, (1990), 15-78, **33**, (1997), 301-329, in preparation.

[Y-Sai1] 斉藤 義久, トロイダル代数入門, 「第１回量子群と代数群の表現論」研究集会報告集, 東京理科大学セミナーハウス (1998), 116-132.

[Y-Sai2] 斉藤 義久, トロイダル代数の対称性をもつ広田型双線形微分方程式について, 「第２回量子群と代数群の表現論」研究集会報告集, 上智軽井沢セミナーハウス (1999), 147-166.